Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude de la fermeture d'un tiroir (12 questions) **Page 3**

2. Séries de Fourier d'une fonction périodique paire (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmhr.fr/assets/annales/bts-mhr/E2 - Mathématiques/2023/BTS MHR - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la fermeture d'un tiroir

La distance entre le fond du tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction f du temps, en centimètres, dont le comportement est décrit par une équation différentielle. L'exercice étudie ensuite cette fonction, le temps nécessaire à la fermeture et la position moyenne du tiroir.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r+1)(r+4)$. L'équation est donc équivalente à $(r+1)(r+4) = 0$. Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, d'où les deux racines réelles distinctes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. Résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0, en s'appuyant sur le tableau fourni.

L'équation caractéristique est $r^2 + 5r + 4 = 0$, dont les deux racines distinctes sont -1 et -4. Le tableau fourni indique que la solution générale est une combinaison des exponentielles associées aux racines. Aucune condition initiale n'étant imposée ici, les deux constantes restent arbitraires.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la situation décrite à l'instant t = 0, déterminer f(0) et f'(0).

La fonction f représente la distance OM en centimètres. À l'instant initial, cette distance vaut 20 cm, ce qui donne $f(0)$. La vitesse de déplacement vers O est donnée comme négative et vaut -10 cm·s^{-1}. Elle correspond à la variation instantanée de la distance, donc à $f'(0)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. En admettant que f(t) = (70/3)e^(-t) - (10/3)e^(-4t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

La distance OM est donnée par $f(t)$, en centimètres. Deux secondes après le début de la fermeture, on évalue donc la fonction en $t = 2$. En remplaçant t par 2 dans chaque exponentielle, on obtient la valeur exacte demandée, sans arrondir les exponentielles.

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Dire si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.

La fonction est continue, car elle est une combinaison d'exponentielles. À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm, donc la distance est déjà sous le seuil de 0,5 cm. Comme elle dépassait ce seuil au départ, elle l'a franchi avant 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui : le constructeur a raison, le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. En utilisant la limite rappelée de e^(-u) lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

On a $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque $t \to +\infty$, les quantités t et $4t$ tendent vers $+\infty$. La limite rappelée pour e^{-u} montre que les deux exponentielles tendent vers zéro. Par somme, la fonction tend également vers zéro.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote, et en donner une équation.

Une limite finie L en $+\infty$ donne une asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, la limite de $f(t)$ vaut 0. La courbe se rapproche donc de l'axe des abscisses lorsque le temps augmente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive les deux termes de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$, en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$. Le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$. Pour le second, le coefficient négatif et la dérivée de e^{-4t} donnent un terme positif.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$, pour tout $t \geq 0$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Comme $f'(t) < 0$ sur $[0; +\infty[$, la fonction est strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et sa limite en $+\infty$ vaut 0. Le tableau résume son sens de variation et les valeurs aux bornes.

t	**0**	$+\infty$
$f(t)$	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en poursuivant les valeurs de t jusqu'à l'arrêt. Indiquer f(t) arrondie au centième et le résultat du test (70/3)e^(-t) - (10/3)e^(-4t) > 0,5.

À chaque ligne, t augmente de 0,1. La boucle continue tant que $f(t) > 0,5$. Les valeurs de la fonction sont arrondies au centième, comme demandé dans le tableau. On poursuit jusqu'à la première ligne où le test devient faux :

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Test** $f(t) > 0,5$
36	3,6	0,64	VRAI
37	3,7	0,58	VRAI
38	3,8	0,52	VRAI
39	3,9	0,47	FAUX

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le test devient faux à la ligne 39, pour $t = 3,9$.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

L'algorithme s'arrête dès que la condition devient fausse. Elle est encore vraie à $t = 3,8$, puis fausse à $t = 3,9$, où la distance est inférieure à 0,5 cm. Le pas de 0,1 seconde fournit une approximation du temps nécessaire : le tiroir est considéré fermé à cette première valeur sous le seuil.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9$ s : le tiroir est fermé en environ 3,9 secondes.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e^(-4) + (5/24)e^(-16).

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi, $m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big)$. En évaluant aux bornes, on obtient $m = \frac{1}{4}\left(\frac{135}{6} - \frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16}\right)$. La simplification donne l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}e^{-4} + \dfrac{5}{24}e^{-16}$ cm.

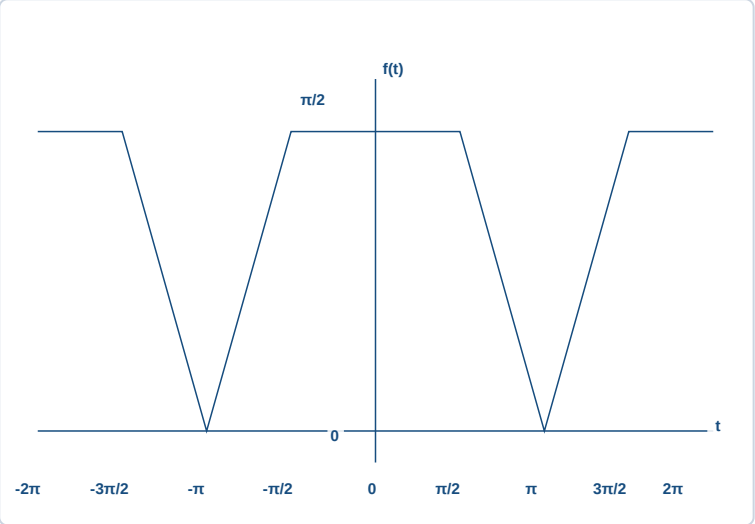
2. Séries de Fourier d’une fonction périodique paire

La fonction étudiée est paire, de période 2π, et définie par morceaux sur [0 ; π]. L’exercice porte sur son tracé, le calcul de ses coefficients de Fourier, l’identification d’une somme partielle et l’estimation de l’erreur sur la valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l’intervalle [-2π ; 2π].

La fonction est paire et de période 2π. Sur une période centrée en zéro, elle vaut $\frac{\pi}{2}$ de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, et atteint zéro en $-\pi$ et π. On répète ce motif par périodicité pour compléter l’intervalle demandé. Les valeurs aux bornes -2π et 2π sont $\frac{\pi}{2}$.

Représentation de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracé pair et périodique de période 2π, nul en $\pm\pi$ et égal à $\frac{\pi}{2}$ sur les plateaux.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient b_n est nul.

La fonction f est paire, alors que $t \mapsto \sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair. Le coefficient sinus peut s’écrire sur l’intervalle symétrique $[-\pi, \pi]$:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = 0.$$

L’intégrale d’une fonction impaire sur un intervalle symétrique est nulle. Le raisonnement vaut pour tout entier $n \geq 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, le coefficient sinus est nul : $b_n = 0$.

Question 3. **Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.**

La période de la fonction est $T = 2\pi$. D'après le formulaire, la pulsation associée à une fonction de période T est $\omega = \frac{2\pi}{T}$. En remplaçant T par sa valeur, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. La pulsation est exprimée en radians par unité de temps.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La pulsation fondamentale est $\omega = 1$ radian par unité de temps.

Question 4. **Démontrer que le coefficient a_0 est égal à 3π/8.**

Pour une fonction paire de période 2π, la formule du formulaire devient $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. On sépare l'intégrale au point $t = \frac{\pi}{2}$, où l'expression de f change :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le coefficient constant vaut exactement $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. **Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, a_n = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.**

Comme f est paire, le formulaire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Ici, $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, donc $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. En séparant les deux morceaux de f, on obtient :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\cos(nt)\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt\right).$$

Le facteur extérieur transforme le premier terme en l'intégrale demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout $n \geq 1$, $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. **En admettant que a_n = 2/(πn²)[cos(nπ/2) - cos(nπ)], déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.**

On applique la formule donnée $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)$. Pour $n = 1$, les cosinus valent 0 et -1, donc $a_1 = \frac{2}{\pi}$. Pour $n = 2$, ils valent -1 et 1, donc $a_2 = -\frac{1}{\pi}$. Pour $n = 3$, ils valent 0 et -1, donc $a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Les coefficients exacts sont $a_1 = \frac{2}{\pi}$, $a_2 = -\frac{1}{\pi}$ et $a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire des résultats précédents que $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.

La somme partielle de rang 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$. D'après les questions précédentes, tous les coefficients b_n sont nuls. En remplaçant a_0, a_1, a_2, a_3 par leurs valeurs, on obtient :

$$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$$

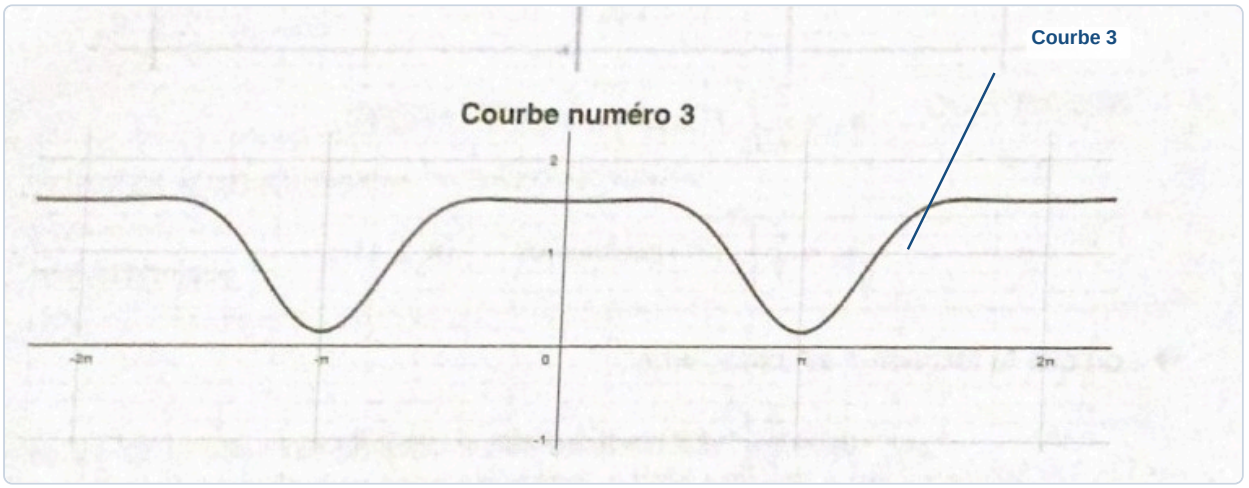
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La somme partielle demandée est $s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.

La courbe numéro 3 présente les creux périodiques aux abscisses $-\pi$ et π, ainsi que des zones presque horizontales autour des maxima. C'est la forme attendue pour la somme partielle de Fourier s_3. Il faut donc reporter le numéro de cette courbe.

Courbe correspondant à s_3



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La courbe associée à s_3 est la courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

On remplace les coefficients par leurs valeurs exactes dans l'expression de P :

$$P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right] = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}.$$

En arrondissant au plus proche à 10^{-4} près, on obtient $1{,}6437$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> À 10^{-4} près, $P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. **Sachant que F est la valeur efficace de f, que F² = π²/6 et que P constitue une approximation de F², choisir le pourcentage d'erreur parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

L'erreur relative est l'écart entre P et F^2, rapporté à F^2. Avec $P \approx 1{,}6437$ et $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$, le pourcentage d'erreur est d'environ $0{,}074\,\%$. Parmi les choix proposés, la valeur correspondante est $0{,}1\,\%$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Le choix exact parmi les réponses proposées est $0{,}1\,\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, d'une durée de deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, évaluent les équations différentielles et l'étude de fonction à partir de la fermeture d'un tiroir, puis les séries de Fourier d'une fonction périodique paire.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique est $r^2 + 5r + 4 = 0$ et ses racines déterminent les exponentielles de la solution générale.
- La distance modélisée est $f(t) = (70/3)e^{(-t)} - (10/3)e^{(-4t)}$, en centimètres, avec t en secondes.
- Pour une fonction paire de période T, les coefficients b_n sont nuls et $a_n = (4/T)\int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)dt$.
- La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \Sigma_{n=1}^{3} a_n\cos(n\omega t)$ lorsque la fonction est paire.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités du modèle : la distance f(t) est en centimètres et le temps t en secondes.
- Dans l'algorithme, appliquer le test strictement supérieur à 0,5 et s'arrêter à la première valeur qui rend la condition fausse.
- Pour Fourier, utiliser $T = 2\pi$ et $\omega = 2\pi/T$, puis tenir compte de la parité de la fonction dans les coefficients.
- Pour la question à choix multiples sur l'erreur, recopier une seule réponse ; aucune justification n'est demandée.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution générale de l'équation différentielle du tiroir ?

Résoudre d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes donnent une solution générale formée de deux exponentielles ; les conditions initiales permettent ensuite de déterminer leurs coefficients.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction f est paire et sin(nωt) est impaire. Leur produit est impair, donc son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle. Par conséquent, tous les coefficients de sinus b_n sont nuls.

Q : Comment répartir son temps dans cette épreuve ?

L'épreuve dure deux heures et comprend deux exercices de dix points. Répartissez le temps entre l'étude du tiroir et Fourier, sans négliger les calculs intermédiaires, le tracé demandé et quelques minutes de vérification finale.

Q : Quel document faut-il rendre et quels coefficients s'appliquent aux spécialités ?

Le sujet demande de rendre le document-réponse avec la copie. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique, selon le tableau du sujet.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmhr.fr/assets/annales/bts-mhr/E2 - Mathématiques/2023/BTS MHR - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Management en Hôtellerie-Restauration : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.