Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MHR

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (14 questions) **Page 3**

2. Probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance dans un magasin de vélos (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmhr.fr/assets/annales/bts-mhr/E2 - Mathématiques/2023/BTS MHR - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir et le meuble est modélisée par une fonction du temps, exprimée en centimètres. L'exercice porte sur l'équation différentielle du mouvement, l'étude de la fonction obtenue, un algorithme de détermination du temps de fermeture et un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. **Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.**

Le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Les solutions sont $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. **Résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 en utilisant le tableau fourni.**

L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, -1 et -4. D'après le tableau fourni, la solution générale de l'équation différentielle est une combinaison linéaire des exponentielles correspondantes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. **À partir de la position initiale du point M et de sa vitesse, déterminer f(0) et f'(0).**

À l'instant initial, la distance entre O et M est de 20 cm. La vitesse négative indiquée dans l'énoncé correspond à la dérivée de cette distance par rapport au temps.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **Sachant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On substitue $t = 2$ dans l'expression de f : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$. Cette expression donne la distance exacte en centimètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2. (suite). **Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.**

À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm, donc $f(4) < 0,5$. La fonction est continue et décroissante sur l'intervalle considéré : le seuil de 0,5 cm est donc atteint avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. **À l'aide de la limite rappelée pour l'exponentielle, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Lorsque $t \to +\infty$, les exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent toutes deux vers 0. La combinaison linéaire qui définit $f(t)$ tend donc également vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote, et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 0. La courbe se rapproche donc de la droite horizontale d'équation $y = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. **Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive chaque terme en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$:

$f'(t) = \frac{70}{3}(-e^{-t}) - \frac{10}{3}(-4e^{-4t})$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\dfrac{70}{3}e^{-t} + \dfrac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Comme $f'(t) < 0$ sur $[0; +\infty[$, la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

t	**0**	$+\infty$
$f(t)$	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant au besoin des lignes jusqu'à son arrêt. Indiquer les valeurs de f(t) arrondies à 10^{-2} et le résultat de la condition à chaque ligne.

À chaque ligne, on augmente t de 0,1 et on teste si $f(t) > 0,5$. La condition reste vraie à $t = 3,8$, puis devient fausse à $t = 3,9$, ce qui arrête la boucle.

Ligne	t	$f(t)$**, arrondi à** 10^{-2}	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, pour $t = 3,9$.

Question 3.b. Donner la valeur de t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

L'algorithme s'arrête au premier pas de 0,1 pour lequel la distance est inférieure ou égale à 0,5 cm. À $t = 3,9$, on obtient environ $0,47$ cm : c'est le premier instant testé où le tiroir répond au critère de fermeture.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9$ s au pas de l'algorithme : le tiroir est fermé.

Question 4.a. **Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. En utilisant $f(0) = 20$ et $f'(0) = -10$, on obtient l'équation demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 10t$.

Question 4.b. **Parmi les propositions, choisir le développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le développement limité indiqué par le calcul formel est $20 - 10t - 15t^2$. Parmi les propositions, celle qui ajoute un reste de la forme $t^2\epsilon(t)$, avec $\epsilon(t) \to 0$, est la bonne.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\epsilon(t)$, avec $\epsilon(t) \to 0$.

Question 4.c. **Indiquer si, au voisinage de zéro, la courbe de f est au-dessus ou en dessous de sa tangente T. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Au voisinage de 0, l'écart entre la courbe et sa tangente est donné au premier terme non nul par $-15t^2$. Pour $t \neq 0$ suffisamment proche de 0, ce terme est négatif.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de la tangente T.

2. Probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance dans un magasin de vélos

Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques et étudie la fréquence des ventes consécutives à ces prêts. Il analyse aussi les durées de réparation sur un échantillon de vélos, puis estime la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

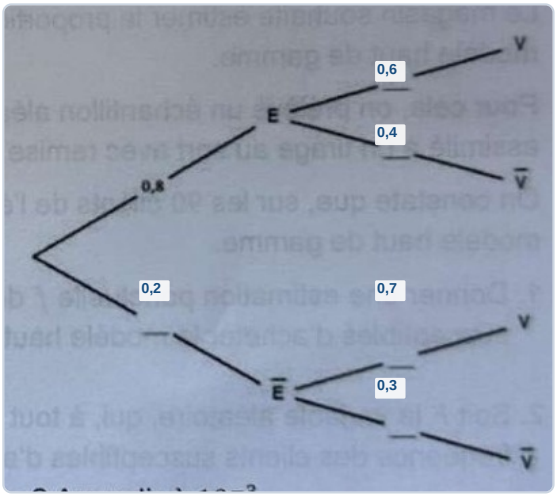
Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et l'issue du prêt, vente ou absence de vente.

L'arbre se complète en deux étapes : d'abord le type de vélo, puis l'issue du prêt. À chaque nœud, les probabilités des branches issues de ce nœud ont une somme égale à 1.

1. Type : vélo électrique, 0,8 ; vélo mécanique, 0,2.
2. Après un vélo électrique : vente, 0,6 ; absence de vente, 0,4.
3. Après un vélo mécanique : vente, 0,7 ; absence de vente, 0,3.

Arbre pondéré complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

Branches : E : 0,8 ; $\overline{E}$: 0,2. Depuis E : V : 0,6 ; $\overline{V}$: 0,4. Depuis $\overline{E}$: V : 0,7 ; $\overline{V}$: 0,3.

Question 2. Déterminer la probabilité P(E ∩ V), où E désigne l'événement « le vélo prêté est électrique » et V l'événement « le prêt débouche sur une vente ».

Pour que les événements E et V se réalisent ensemble, le vélo doit d'abord être électrique, puis le prêt doit aboutir à une vente. On multiplie donc la probabilité de choisir un vélo électrique par la probabilité conditionnelle d'une vente dans ce cas : $P(E \cap V) = P(E) \times P_E(V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$. Cette probabilité correspond à 48 % des prêts.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(E \cap V) = 0,48$, soit 48 %.

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Les événements E et $\overline{E}$ forment une partition. Une vente peut donc suivre l'un ou l'autre des deux types de prêt. Les probabilités des chemins menant à une vente sont :

Type de vélo	Calcul du chemin	Probabilité
Électrique	$0,8 \times 0,6$	0,48
Mécanique	$0,2 \times 0,7$	0,14

En les additionnant, on obtient la probabilité totale d'une vente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(V) = 0,48 + 0,14 = 0,62$, soit 62 %.

Question 4. **Sachant que le prêt d'un vélo a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique. Arrondir à 10^{-3}.**

On cherche la probabilité qu'un vélo soit électrique sachant que le prêt a débouché sur une vente. La probabilité conditionnelle s'obtient en divisant la probabilité de l'intersection par celle de la vente.

$$P_V(E) = \frac{P(E \cap V)}{P(V)} = \frac{0,48}{0,62} = \frac{24}{31} \approx 0,7741935.$$

L'arrondi demandé conserve trois chiffres après la virgule.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P_V(E) \approx 0,774$.

Partie B - Loi binomiale

Question 1. **Donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X, qui compte les vélos, parmi les 80 réparés, dont la réparation a nécessité moins d'une heure de main-d'œuvre.**

On compte comme succès une réparation nécessitant moins d'une heure. Sa probabilité est 0,62, et le nombre de réparations observées est 80. Puisque l'énoncé indique que X suit une loi binomiale, ses paramètres sont le nombre d'épreuves et la probabilité de succès.

Paramètre	Valeur
Nombre d'épreuves n	80
Probabilité de succès p	0,62

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62)$: $n = 80$ et $p = 0,62$.

Question 2. Déterminer P(X = 40). Arrondir à 10^{-3}.

Pour une loi binomiale de paramètres 80 et 0,62, la probabilité d'obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure est :

$P(X = 40) = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(1-0,62)^{40} = \binom{80}{40}(0,62)^{40}(0,38)^{40} \approx 0,008282.$

On arrondit cette valeur au millième comme demandé.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(X = 40) \approx 0,008.$

Question 3. Déterminer la probabilité que le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.

Si X vélos nécessitent moins d'une heure, les $80 - X$ autres nécessitent plus d'une heure. La comparaison demandée se traduit ainsi :

1. $X > 80 - X$, donc $X > 40$, soit $X \geq 41$.
2. La probabilité cherchée est $P(X \geq 41) = 1 - P(X \leq 40)$.

Pour $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0,62)$, on obtient environ 0,98094, soit 0,981 au millième.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(X \geq 41) \approx 0,981.$

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. À partir des 54 clients sur 90 susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Parmi les 90 clients interrogés, 54 sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme. On divise cet effectif par l'effectif total : $f = \frac{54}{90} = 0,6$. La fréquence observée est donc de 60 %.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f = 0,6$, soit 60 %.

Question 2.a. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % pour la proportion p.

La formule fournie donne l'intervalle $\left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\,;\, f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$. Avec $f = 0,6$ et $n = 90$, la marge vaut environ 0,1012. Les bornes, arrondies au millième, sont :

Borne	Calcul	Valeur
Inférieure	$0,6 - 1,96\sqrt{0,24/90}$	0,499
Supérieure	$0,6 + 1,96\sqrt{0,24/90}$	0,701

L'intervalle est exprimé en proportions.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,499\,;\,0,701]$.

Question 2.b. Dire si l'on est certain que la proportion p appartient à l'intervalle de confiance obtenu.

Non. Un intervalle de confiance au niveau de 95 % ne donne pas une certitude sur la valeur inconnue de p. Ce niveau signifie que, si l'on répétait les prélèvements et la construction de l'intervalle, environ 95 % des intervalles ainsi obtenus contiendraient p. Pour l'intervalle calculé à partir de cet échantillon, on ne peut donc pas affirmer avec certitude que p lui appartient.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Non : le niveau de confiance est de 95 %, pas une certitude.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, porte le code 23MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est de 2, sauf pour Traitement des matériaux, où il est de 3. Les deux exercices, notés chacun sur 10 points, étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis un magasin de vélos par probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$ détermine les formes des solutions.
- La fonction de distance étudiée est $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$.
- Pour une loi binomiale B(n,p), $P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^{n-k}$.
- L'intervalle de confiance fourni est $f \pm 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Utiliser f(0) et f'(0) pour déterminer les constantes de la solution générale de l'équation différentielle.
- Relier la condition $f(t) < 0{,}5$ à la fermeture du tiroir et vérifier les unités de distance et de temps.
- Dans un arbre pondéré, multiplier le long d'une branche et additionner les branches correspondant à l'événement demandé.
- Pour les questions à choix multiples, une seule réponse est exacte et une réponse fausse ne retire pas de point.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment construire la solution de l'équation différentielle du tiroir ?

Résolvez d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines donnent la solution générale de l'équation différentielle. Utilisez ensuite f(0) et f'(0) pour déterminer les constantes.

Q : Comment traduire la comparaison des deux nombres de réparations avec X ?

X représente le nombre de réparations de moins d'une heure parmi 80. Le nombre de réparations de plus d'une heure est 80 - X. La première catégorie est strictement plus nombreuse lorsque X > 80 - X.

Q : Comment organiser le temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points, et les parties de l'exercice 2 peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les arrondis et les unités.

Q : Quels éléments de barème et de notation sont précisés dans le sujet ?

Le sujet indique un total de 10 points pour chacun des deux exercices. Il ne détaille pas la répartition des points entre les questions. Pour les choix multiples de l'exercice 1, une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni ne retire de point.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmhr.fr/assets/annales/bts-mhr/E2 - Mathématiques/2023/BTS MHR - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Management en Hôtellerie-Restauration : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.