Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d’un chariot : équation différentielle, étude de fonction et développement limité (12 questions) **Page 3**

2. Système électrique entrée-sortie et transformées de Laplace (9 questions) **Page 6**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmhr.fr/assets/annales/bts-mhr/E2 - Mathématiques/2022/BTS MHR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d’un chariot : équation différentielle, étude de fonction et développement limité

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m/s, est ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée pour étudier son évolution, déterminer la distance parcourue et analyser localement sa courbe.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l’équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0 sur l’intervalle considéré.

Pour une équation de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$. Ici, $a = 0,8$, donc on remplace directement a par cette valeur.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. Pour g(t) = 5, vérifier que g est une solution de l’équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g'(t) = 0$. Ainsi, $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$, ce qui vérifie l’équation (E).

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1. c. En déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

On ajoute à la solution particulière $g(t) = 5$ les solutions de l’équation homogène associée, obtenues à la question précédente. Cela donne toutes les solutions de (E).

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Sachant que f(0) = 20, déterminer la solution f de l’équation différentielle (E) qui vérifie cette condition initiale.

La solution générale donne, à $t = 0$, $f(0) = 5 + k$. La condition $f(0) = 20$ impose donc $k = 20 - 5 = 15$. On remplace ensuite k dans l’expression générale.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Quand $t \to +$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Il reste le terme constant 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite obtenue que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant finie et égale à 5, la courbe C admet une asymptote horizontale d'ordonnée 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À l'aide de l'expression donnée pour f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Comme $e^{-0,8t} > 0$, on a $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur $[0; +[$. Ainsi, f est strictement décroissante, avec $f(0) = 20$ et une limite égale à 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	–	
$f(t)$	20	↘ 5

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout $t \geq 0$, $15e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse ne s'annule jamais : le chariot ralentit, mais ne s'arrête pas dans le modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4. a. **Pour F(t) = −18,75e^(−0,8t) + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = 18,75 \times 0,8e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette dérivée est bien égale à $f(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4. b. **En utilisant la relation entre la distance parcourue et l'intégrale de la vitesse, calculer la distance exacte parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance vaut $d = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée : $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. L'arrondi au centimètre est obtenu à partir de cette valeur exacte.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m, soit $15,33$ m au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions, recopier celle qui donne le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

La partie régulière affichée par le logiciel est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. À l'ordre 2, le reste doit s'écrire $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il faut donc choisir la troisième proposition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

La tangente en $t = 0$ a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. Or $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$. On obtient l'équation de la tangente.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Système électrique entrée-sortie et transformées de Laplace

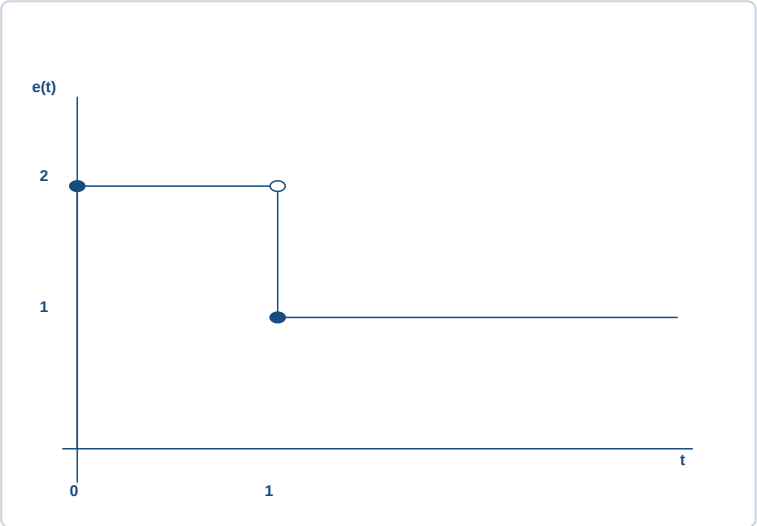
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) − U(t − 1) et produit un signal de sortie s(t). Sa fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1) permet d'étudier les signaux à l'aide des transformées de Laplace et de représenter la sortie.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

La définition donne $U(t) = 0$ avant 0 et $U(t) = 1$ à partir de 0. Ainsi, $e(t) = 0$ pour $t < 0$, puis $e(t) = 2$ pour $0 \leq t < 1$. À partir de 1, les deux échelons valent 1, donc $e(t) = 1$. Le dessin représente les deux sauts, avec les points pleins aux valeurs effectivement prises et un point ouvert pour la valeur exclue en $t = 1$.

Signal d'entrée e(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$e(t) = 0$ si $t < 0$, 2 si $0 \leq t < 1$, et 1 si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

Par linéarité, on transforme séparément les deux termes de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$. Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$ et $\mathcal{L}\{U(t-a)\} = e^{-ap}/p$. Pour le second échelon, le décalage est $a = 1$, donc sa transformée est e^{-p}/p. On soustrait cette transformée à deux fois celle de $U(t)$, ce qui fournit directement $E(p)$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] − [1/[p(p + 1)]]e^(−p).

La fonction de transfert vérifie $S(p) = H(p)E(p)$. En utilisant $H(p) = 1/(p+1)$ et le résultat de la partie A, $E(p) = (2 - e^{-p})/p$, on obtient $S(p) = \dfrac{1}{p+1} \times \dfrac{2 - e^{-p}}{p}$. La mise au même dénominateur, puis la séparation des deux termes du numérateur, donnent l'expression demandée. Le facteur e^{-p} correspond au décalage temporel d'une unité.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S(p) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \dfrac{e^{-p}}{p(p+1)}$.

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).

Pour vérifier cette décomposition, on met les deux fractions de droite au dénominateur commun $p(p+1)$. Leur numérateur devient $(p+1) - p$, donc il se réduit à 1. On retrouve exactement le membre de gauche. Cette égalité est valable pour les valeurs de p pour lesquelles les fractions sont définies, c'est-à-dire hors des zéros des dénominateurs.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$, pour $p \neq 0, -1$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(−p)/p et de e^(−p)/(p + 1).

Les deux premières transformées inverses sont celles du formulaire. Pour les deux autres, la propriété de décalage indique que le facteur e^{-p} retarde le signal d'une unité et le multiplie par $U(t-1)$.

1. $\mathcal{L}^{-1}(1/p) = U(t)$.
2. $\mathcal{L}^{-1}(1/(p+1)) = e^{-t}U(t)$.
3. $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/p) = U(t-1)$.
4. $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/(p+1)) = e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Le facteur échelon rend les deux signaux retardés nuls avant $t = 1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les inverses sont $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$ et $e^{-(t-1)}U(t-1)$, dans l'ordre demandé.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

À partir de la décomposition en éléments simples, on écrit $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. La transformée inverse du premier groupe vaut $2(1 - e^{-t})U(t)$. Le second groupe est retardé d'une unité et comporte donc le facteur $U(t-1)$: il est nul pour $0 \leq t < 1$. Il ne reste alors que le premier groupe sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5. a. Sachant que s(t) = (e − 2)e^(−t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis avec une valeur approchée au dixième.

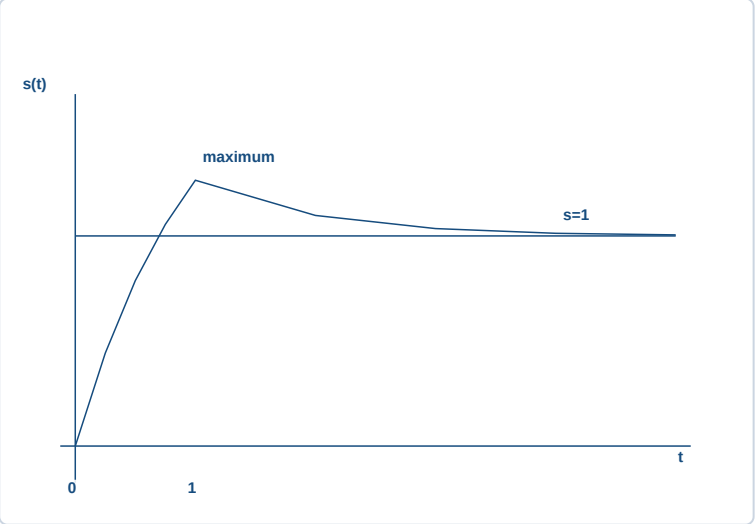
On remplace t par 1 dans l'expression valable pour $t \geq 1$: $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $e^{-1} = 1/e$, on simplifie : $s(1) = (e-2)/e + 1 = 2 - 2/e$. La valeur numérique est environ $1,264$. L'arrondi au dixième demandé est donc $1,3$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1,3.$

Question 5. b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0;1[$, la sortie suit $s(t) = 2(1 - e^{-t})$, puis atteint en $t = 1$ la valeur $2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, elle suit $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$: elle décroît puisque $e - 2 > 0$ et tend vers 1. Les deux expressions donnent la même valeur en $t = 1$. Le tracé conserve donc la continuité au raccordement, le maximum en ce point et l'asymptote horizontale $s = 1$.

Courbe représentative de s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe passe par $(0;0)$ et $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote $s=1$.

Question 5. c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, l'expression admise est $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exponentielle e^{-t} tend vers 0. Le coefficient $e-2$ étant constant, le produit $(e-2)e^{-t}$ tend également vers 0. Il ne reste donc que le terme constant 1. Cette limite correspond à la valeur de l'asymptote horizontale de la courbe.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot puis un système électrique entrée-sortie, et évalue les équations différentielles, l'analyse de fonctions, l'intégration et les transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont y(t) = ke^(−at) ; une solution particulière permet de résoudre l'équation avec second membre.
- Si f(t) tend vers L quand t tend vers +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : d = ∫[t_0,t_1] f(t) dt.
- La transformée de Laplace de f(t − a)U(t − a) est F(p)e^(−ap) ; le facteur exponentiel correspond à un retard.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale f(0) = 20 après avoir déterminé la famille des solutions de l'équation différentielle.
- Pour conclure sur l'arrêt du chariot, distinguer une vitesse qui tend vers zéro d'une vitesse qui tend vers une constante positive.
- Dans l'étude de s(t), appliquer la propriété de retard aux termes multipliés par e^(−p) et respecter le seuil t = 1.
- Donner les valeurs exactes et les arrondis demandés ; exprimer les distances dans l'unité indiquée.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de l'exercice sur la vitesse ?

Résoudre d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis ajouter une solution particulière constante de l'équation avec second membre. La condition f(0) = 20 permet ensuite de déterminer la constante de la solution générale.

Q : Comment savoir si le chariot s'arrête à partir de sa vitesse ?

Étudier la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞. Si cette limite est strictement positive, la vitesse ne tend pas vers zéro. Selon le modèle donné dans le sujet, le chariot ne s'arrête donc pas.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points. Les trois parties de l'exercice 1 peuvent être traitées indépendamment. Prévoyez aussi du temps pour les tracés sur le document-réponse et pour vérifier les calculs.

Q : Quels éléments de présentation sont importants pour les réponses ?

L'énoncé demande des valeurs exactes et certains arrondis précis, notamment au centimètre ou au dixième. Utilisez le document-réponse pour les courbes et indiquez les unités associées aux grandeurs physiques.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmhr.fr/assets/annales/bts-mhr/E2 - Mathématiques/2022/BTS MHR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Management en Hôtellerie-Restauration : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.