Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle des tubes fluorescents et estimation de la proportion de rivets conformes (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmhr.fr/assets/annales/bts-mhr/E2 - Mathématiques/2022/BTS MHR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage

Un chariot de fête foraine roule à 20 m/s avant d'être ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction exponentielle, étudiée au moyen d'une équation différentielle, de l'analyse de fonction, d'une intégrale et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. **Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.**

Pour l'équation homogène, on applique la formule donnée dans le sujet : les solutions de $y' + ay = 0$ sont $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient vaut $a = 0,8$. En le remplaçant dans la formule, on obtient l'ensemble des solutions sur l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. **Soit g la fonction définie par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

1. La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$.
2. Dans le membre de gauche, on remplace y par g : $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$.
3. On retrouve le second membre de l'équation, donc l'égalité est vérifiée pour tout t.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1. c. **Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.**

Une solution particulière de l'équation complète est $g(t) = 5$. Toutes ses solutions s'obtiennent en ajoutant à cette solution une solution de l'équation homogène associée, trouvée à la question 1.a. On ajoute donc à 5 le terme exponentiel général de cette équation.

La constante k peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. On applique la condition initiale en prenant $t = 0$: comme $e^0 = 1$, on obtient $f(0) = 5 + k = 20$. Ainsi, $k = 20 - 5 = 15$. En reportant cette valeur dans la solution générale, on détermine la fonction cherchée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

La fonction étudiée est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers +∞, l'exposant $-0,8t$ tend vers -∞. Or l'exponentielle d'une quantité qui tend vers -∞ tend vers zéro. Le terme $15e^{-0,8t}$ disparaît donc à la limite et il reste la constante.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

Une limite finie en +∞ donne une asymptote horizontale : si $f(t)$ tend vers L, alors la droite d'équation $y = L$ est asymptote à la courbe. Ici, la limite démontrée à la question précédente vaut 5. La courbe représentative se rapproche donc de cette droite lorsque t augmente.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'asymptote horizontale à C est $y = 5$.

Question 2. En utilisant l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, l'expression donnée de $f'(t)$ est négative sur tout l'intervalle, donc f est strictement décroissante. On utilise aussi $f(0) = 20$ et la limite égale à 5.

t	0	+∞
$f'(t)$	–	
$f(t)$	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0 ; +\infty[$.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

Pour s'arrêter, le chariot devrait atteindre une vitesse nulle. Or, pour tout $t \geq 0$, le terme exponentiel est strictement positif. La vitesse reste donc supérieure à $5\ m \cdot s^{-1}$ et, tout en diminuant, se rapproche de cette valeur sans l'atteindre.

- La vitesse ne devient jamais nulle.
- Le freinage ne permet donc pas l'arrêt selon ce modèle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse tend vers $5\ m \cdot s^{-1}$ sans atteindre zéro.

Question 4. a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

On dérive les deux termes de $F(t) = -18{,}75e^{-0{,}8t} + 5t$. Par dérivation d'une exponentielle composée, $(e^{-0{,}8t})' = -0{,}8e^{-0{,}8t}$. Ainsi, $F'(t) = (-18{,}75)(-0{,}8)e^{-0{,}8t} + 5 = 15e^{-0{,}8t} + 5$. Cette expression est exactement $f(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. La distance d parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par l'intégrale de f entre ces instants. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue entre 0 et 1 seconde est l'intégrale de la vitesse. Avec la primitive donnée, on calcule :

1. $d = F(1) - F(0)$.
2. $d = (-18{,}75e^{-0{,}8} + 5) - (-18{,}75) = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}$.
3. Cette valeur est arrondie au centimètre, soit à deux décimales en mètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}\ m \approx 15{,}33\ m$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Question à choix multiples : parmi les expressions proposées, recopier la seule expression correspondant au développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.

Le logiciel donne la partie régulière du développement limité : $20 - 12t + 24/5\ t^2$. Parmi les expressions proposées, il faut choisir celle où le reste est de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t)$ qui tend vers zéro lorsque t tend vers zéro. C'est la troisième proposition ; les deux autres ne présentent pas le reste sous la forme requise.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $20 - 12t + 24/5\ t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en l'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. On lit $f(0) = 20$ dans l'énoncé, et la dérivée donnée dans la partie B fournit $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par le point d'ordonnée 20 et a pour coefficient directeur -12.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Contrôle des tubes fluorescents et estimation de la proportion de rivets conformes

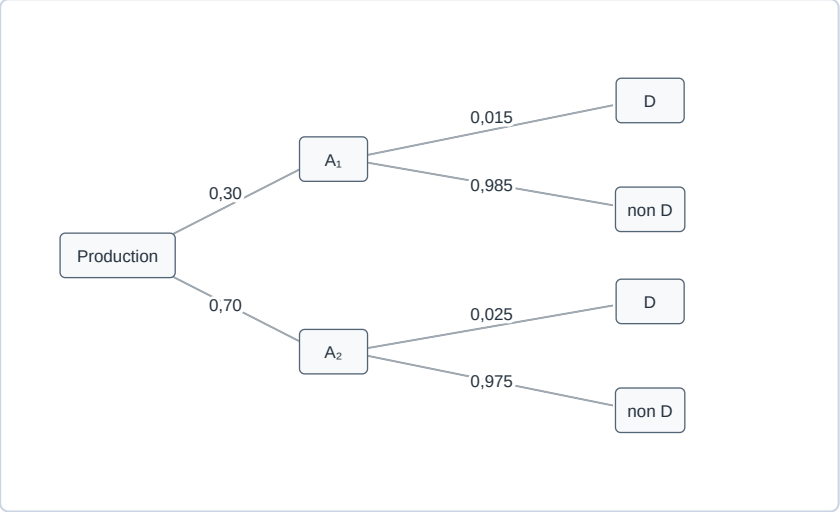
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers et contrôle leur conformité en recherchant les défauts. L'exercice étudie les probabilités conditionnelles liées aux ateliers, la durée de fonctionnement modélisée par une loi exponentielle et l'estimation d'une proportion de rivets conformes.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation, à partir des proportions de production des ateliers 1 et 2 et de leurs taux de tubes présentant un défaut.

Les branches du premier niveau correspondent aux parts de production. Pour chaque atelier, on complète le taux de défaut par son complément à 1.

Arbre pondéré des ateliers et des défauts



D : le tube présente un défaut.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Atelier 1 : 0,30 ; atelier 2 : 0,70. Taux de défaut : 0,015 et 0,025 ; sans défaut : 0,985 et 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D) qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut.

On multiplie la part de production de l'atelier 1 par son taux de défaut : $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 %.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube pris au hasard présente un défaut est P(D) = 0,0195.**

Par la formule des probabilités totales, $P(D) = P(A_1)P(D \mid A_1) + P(A_2)P(D \mid A_2)$. Ainsi, $P(D) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,022$. Les taux indiqués sur la page originale donnent donc 0,022, et non 0,0195.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit 2,2 %.

Question 4. **Sachant qu'un tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

La probabilité d'obtenir un tube de l'atelier 2 sans défaut est $0,70 \times 0,975 = 0,6825$. La probabilité totale d'absence de défaut est $1 - 0,022 = 0,978$. Ainsi, $P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{0,6825}{0,978}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T d'un tube suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,0001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

La page originale indique $\lambda = 0,001$. Pour une loi exponentielle, $E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,001} = 1\,000$ heures. C'est la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures.

Question 2. **Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent soit inférieure à 8 000 heures.**

Pour une loi exponentielle, $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Avec la valeur de la page originale, $\lambda = 0,001$: $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0,9997$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 1,00$, arrondi au centième.

Question 3. **Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent soit supérieure à 10 000 heures.**

Pour une loi exponentielle, $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Avec $\lambda = 0,001$, on obtient $P(T > 10\,000) = e^{-0,001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0,0000454$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0,00$, arrondi au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.**

L'estimation ponctuelle est la fréquence observée : $\hat{p} = \frac{975}{1\,000} = 0,975$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\hat{p} = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. **En utilisant la formule fournie pour un intervalle de confiance d'une proportion au niveau de confiance de 95 %, déterminer un intervalle centré sur la fréquence observée. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.**

Avec $f = 0,975$, $n = 1\,000$ et la formule donnée, la marge est $1,96\sqrt{\frac{0,975(1-0,975)}{1\,000}} \approx 0,009677$. Les bornes sont donc $0,975 - 0,009677$ et $0,975 + 0,009677$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB1, dure 2 heures et compte généralement un coefficient 2, ou 3 en Traitement des matériaux. Ses deux exercices portent sur le freinage d'un chariot et le contrôle de production de tubes fluorescents et de rivets. Ils évaluent équations différentielles, analyse de fonctions, intégrales, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b constant, la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- Une fonction de limite L en +∞ a pour asymptote horizontale la droite d'équation y = L.
- Pour T de loi exponentielle de paramètre λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt) et E(T) = 1/λ.
- L'intervalle de confiance fourni est f ± 1,96√(f(1-f)/n), où f est la fréquence observée et n l'effectif.

Points de vigilance & attentes du jury

- Après avoir établi la solution générale de l'équation différentielle, appliquer la condition initiale pour déterminer la constante.
- Pour discuter l'arrêt, distinguer une vitesse qui tend vers une valeur positive d'une vitesse qui s'annule en un temps fini.
- Dans l'arbre pondéré, placer les proportions des ateliers puis leurs taux conditionnels de défaut, et appliquer les probabilités totales.
- Respecter les unités et précisions demandées : probabilités au centième, distance au centimètre et bornes de l'intervalle au millième.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du chariot ?

Résoudre d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis ajouter une solution particulière constante de l'équation avec second membre. Utiliser ensuite la condition f(0) = 20 pour déterminer la constante.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube soit défectueux ?

Additionner les probabilités des deux cas disjoints : la proportion de production de chaque atelier multipliée par son taux de défaut. Cette somme applique la formule des probabilités totales.

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment organiser le travail ?

L'épreuve dure 2 heures et comprend deux exercices de 10 points. Les trois parties de chaque exercice sont indépendantes : répartissez le temps entre elles, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, unités et arrondis.

Q : Quels arrondis et critères de notation faut-il respecter ?

Suivez la précision demandée dans chaque consigne : probabilités de la partie B au centième, distance au centimètre et bornes de l'intervalle au millième. Pour le QCM, une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmhr.fr/assets/annales/bts-mhr/E2 - Mathématiques/2022/BTS MHR - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Management en Hôtellerie-Restauration : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.